Épreuve blanche d'Olympiade : Corrigé

I) Tous distinctes [Exercice national 2024]

Correction

1. Si A est de cardinal n, le nombre de parties de A est 2^n, puisque choisir une partie de A revient à choisir, pour chaque élément de A, si il appartient à la partie ou non (2 choix).
   Le nombre de parties de A non vides est donc $2^n - 1$.
2. Pour $\{1,3,5\}$, il s'agit de vérifier que les $2^3 - 1 = 7$ sommes possibles sont toutes distinctes.
   Pour $\{4,6,7,9\}$ il suffit de remarquer que $4+9 = 6+7$.
3. Si A contient 0, alors ou bien $n = 1$ et $A = \{0\}$, qui est bien STD, ou bien $n > 1$ et A contient un autre élément, x_1, et on a alors $x_1 = x_1 + 0$, donc A n'est pas STD.
4. **a.** Les sommes d'éléments de A sont en particuliers des sommes d'éléments de B. Comme B est STD, toutes les sommes sont distinctes, donc A est STD.
   b. Par contraposée de la question précédente, si B est STD, A l'est aussi.
5. Montrons que $A' = A \cup \{\frac{1}{2}\}$ est STD :
   On considère deux sommes d'éléments de A' correspondant à des parties distinctes. On les note $x_1 + \cdots + x_\ell$ et $y_1 + \cdots + y_m$.
   Si aucune des deux sommes ne contient l'élément $\frac{1}{2}$, alors ce sont des sommes d'éléments de A, et comme A est STD, les sommes sont différentes.
   Si une des sommes contient l'élément $\frac{1}{2}$, et l'autre non alors comme les éléments de A sont entiers, une des sommes ne sera pas entière et l'autre sera entière, donc elles seront distinctes.
   Si les deux sommes contiennent l'élément $\frac{1}{2}$, on peut le simplifier et obtenir une égalité entre deux sommes de A, ce qui semble exclu par le fait que A est STD.
   En fait, l'énoncé est erroné. Le problème vient du fait que parmi les deux sommes de A obtenues, l'une peut être vide (c'est-à-dire ne contenir aucun élément). Un contre-exemple à l'énoncé est alors $A = \{-1, 1\}$, qui est bien STD, alors que $\{-1, 1, \frac{1}{2}\}$ ne n'est pas, car $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 + (-1)$.
   Un autre contre exemple est $A = \{0\}$, qui est STD, alors que $\{\frac{1}{2}, 0\}$ ne l'est pas.
   L'énoncé aurait du préciser que les éléments de A étaient des entiers naturels non nuls.
   Pour ce qui est de $A \cup \{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\}$. Il s'agit de dire que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Alors il n'est pas possible d'avoir une égalité de la forme $q_1 + \sqrt{2} = q_2$ avec $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Le même raisonnement que pour $A \cup \{\frac{1}{2}\}$ permet de conclure.
6.
7. L'algorithme suivant n'est pas efficace, puisque comme on le verra plus tard, la suite (u_n) est en fait géométrique.

```python
def calcul_u(n): # Calcule u_n
    # On construit une liste des valeurs de la suite
    l = [1] # l contient u1
    for i in range(n-1): # Pour calculer u_n, on itère n-1 fois
        s = 0 # On va calculer la somme des précédents termes, + 1
        for e in l: # pour chaque élément de la liste
            s = s + e
        l.append(s+1)
    return l[-1] # Le dernier élément de l, c'est aussi l[n-1]
```

8. Il s'agit de commencer par remarquer que tous les termes de la suite sont positifs. (Formellement c'est une récurrence : u_1 est bien positif et si $u_1, \ldots, u_n$ sont positifs, alors u_{n+1} l'est)
   Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = u_1 + \cdots + u_{n-1} + 1 > 0$, donc (u_n) est strictement croissante.
9. Imaginons que deux sommes soient égales : on peut l'écrire
   $u_{n_1} + u_{n_2} + \cdots + u_{n_k} = u_{m_1} + u_{m_2} + \cdots + u_{m_\ell}$, pour des indices $n_1 < \ldots < n_k$ et $m_1 < \ldots < m_\ell$.
   Justifions que nécessairement, $n_k = m_\ell$: Si ce n'était pas le cas, on aurait par exemple $n_k > m_\ell$, mais u_{n_k} est, d'après la relation de récurrence, égal à la somme des termes précédents de la suite, plus 1. Comme les termes de la suite sont positifs, on a forcément $u_{n_k} > u_{m_1} + u_{m_2} + \cdots + u_{m_\ell}$, ce qui contredit l'égalité des deux sommes.
   Comme $u_{n_k} = u_{m_\ell}$, on peut simplifier ces deux termes dans les deux sommes. Puis recommencer avec les deux nouveaux plus grand termes, etc, au final on obtiendra que les deux sommes contiennent forcément tous les mêmes termes.
10. Pour $n \geq 2$, on a $u_{n+1} = u_1 + \cdots + u_n + 1 = u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n + 1 = (u_n - 1) + u_n + 1 = 2u_n$, et par ailleurs, pour $n = 1$, on a $u_{n+1} = u_2 = 2 = 2 \cdot 1 = 2u_1$.
    la suite est donc bien géométrique.
11. **a.** L'ensemble $\{u_1, \ldots, u_n\}$ étant STD, toutes ses $2^n - 1$ sommes possibles sont distinctes, et comme les u_i sont ≥ 1, toutes les sommes sont ≥ 1. La plus grande somme est donc forcément $\geq 2^n - 1$, autrement dit, $u_1 + \cdots + u_n \geq 2^n - 1$.
    b. On a $u_1 + \cdots + u_n \geq 2^n - 1$, et la suite (u_n) est strictement croissante, donc u_n est le plus grand des termes, donc il est plus strictement plus grand que la moyenne des termes, autrement dit $u_n > \frac{2^n-1}{n}$ (pour $n = 1$, on a seulement $u_n \geq \frac{2^n-1}{n}$).
    Cela s'écrit $nu_n > 2^n - 1$, et comme nu_n est un entier, $nu_n \geq 2^n$, donc $u_n \geq \frac{2^n}{n}$.

II) Une descente infinie [Exercice national 2023]

Correction

1. Les relations coefficients-racines donnent $b = -(r_1 + r_2)$ et $c = r_1 r_2$.
   Pour les justifier : on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + bx + c = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$. En prenant $x = 0$, on obtient $c = r_1 r_2$, puis en écrivant ce que l'on obtient en $x = 1$, on trouve $b = -(r_1 + r_2)$.
2. Si $b \leq 0$ et $c \geq 0$, alors $r_1 r_2 = c$ donc r_1 et r_2 ont le même signe, et $r_1 + r_2 = -b \geq 0$, donc r_1 et r_2 sont positives (ou nulles).
3. **a.** Si (x_1, x_2, x_3) vérifient $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$, alors le terme de gauche de l'égalité est ≥ 0, donc $\alpha x_1 x_2 x_3 \geq 0$, donc $x_1 x_2 x_3 \geq 0$.
   On en déduit que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha |x_1 x_2 x_3|$, ce qui est équivalent à $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = \alpha |x_1||x_2||x_3|$. Le triplet $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est donc solution de (E).
   b. C'est clair.
4. Si (x_1, x_2, x_3) est solution, le triplet (x_2, x_1, x_3) l'est également. Plus généralement, toute permutation des trois entiers est encore solution.
5. Si (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^3$ non triviale (c'est-à-dire différente de $(0, 0, 0)$), d'après une question précédente elle admet une solution dans $\mathbb{N}^3$ non triviale (x_1, x_2, x_3), et d'après la question 4., quitte à réordonner les termes, on peut supposer que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.
6. Supposons que $x_1 = 0$. Alors x_2 et x_3 vérifient $x_2^2 + x_3^2 = 0$. Le membre de gauche étant une somme de termes positifs, nécessairement $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$, donc $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$, ce qui contredit l'hypothèse.
7. **a.** Découle des définitions.
   b. Par hypothèse x_3 est racine de Q.
   c. $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)$ est une simple vérification (développer le membre de droite).
   Alors, comme $0 \leq x_1 \leq x_2$, on a $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$ (croissance de la fonction carré).
   Par ailleurs, comme $x_1 > 0$, on a $x_1 \geq 1$. Comme $\alpha \geq 4$, on en déduit que $3 - \alpha x_1 < 0$, et comme $x_2 \geq x_1 > 0$, on a $(3 - \alpha x_1)x_2^2 < 0$.
   Conclusion : $Q(x_2) < 0$.
   d. On a $Q(0) = x_1^2 + x_2^2 > 0$.
   e. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $Q(0) > 0$ et $Q(x_2) < 0$, le polynôme Q doit s'annuler entre 0 et x_2 : il existe $y \in]0,x_2[$ tel que $Q(y) = 0$.
   Comme $y < x_2 \leq x_3$, cette racine y est distincte de x_3.
   On a donc $0 < y < x_2 < x_3$, l'inégalité $x_2 < x_3$ étant justifiée par le fait que $Q(x_2) < 0$ alors que $Q(x_3) = 0$.
   f. Comme y est racine de Q, d'après une question précédente, (x_1, x_2, y) est solution de (E).
   Reste à justifier que y est entier. Cela vient du fait que, d'après la sous-partie 1), la somme des deux racines de Q doit être un entier, et que l'autre racine de Q (qui est x_3) est entière.
8. Si on range (x_1, x_2, y) par ordre croissant, on obtient ou bien (x_1, y, x_2), ou bien (y, x_1, x_2).
   Le raisonnement de la question 7. permet de trouver un $z < x_2$ tel que (x_1, y, z) soit solution, (ou (y, x_1, z), ce qui revient au même).
9. Si (E) admet une solution non triviale, on a vu que (E) admettait une solution non triviale dans $\mathbb{N}^3$.
   À partir d'une telle solution (x_1, x_2, x_3) vérifiant $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ on a vu que $x_1, x_2, x_3 > 0$ et la question précédente (en appliquant 2 fois le raisonnement de 7.) permet d'obtenir une solution (x_1, y, z) telle que $y, z < x_3$. Il reste la possibilité que $x_1 = x_3$, auquel cas en réappliquant une nouvelle fois le raisonnement de la question 7., on trouvera une solution (y, z, w) telle que $y, z, w < x_3$.
   Dans tous les cas, on peut donc construire une nouvelle solution (y, z, w) dont les trois termes sont > 0 et $< x_3$. Autrement dit, une nouvelle solution dont les trois termes sont > 0, et dont le maximum est strictement plus petit que celui de la solution initiale.
   En itérant ceci, on construirait une suite d'entiers naturels (les maximums des solutions) strictement décroissante, ce qui est impossible.
   Conclusion : il n'existe pas de solution autre que $(0, 0, 0)$.
10.

III) Partage équitable [Exercice académique 2008]

Correction

1. L'aire de chacun des deux triangles rectangles est $\frac{x}{2}$.
   Comme l'aire du carré est 1, l'aire de la troisième partie est $1 - 2\frac{x}{2} = 1 - x$.
   Les trois parties seront de même aires si et seulement si $\frac{x}{2} = 1 - x$, c'est-à-dire si et seulement si $3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.
2. La zone grisée est un triangle rectangle, de côtés $1 - x$, donc d'aire $\frac{(1-x)^2}{2}$.
   La nouvelle troisième partie a donc comme aire $1 - x - \frac{(1-x)^2}{2}$.
   Les trois parties auront la même aire si et seulement si $1 - x - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 - 2x - (1-x)^2 = x \Leftrightarrow 2 - 2x - 1 + 2x - x^2 = x \Leftrightarrow 1 - x^2 = x \Leftrightarrow 1 - x - x^2 = 0$.
   Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et pour racines $\frac{1\pm\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. L'une de ses racine est < 0, et l'autre est $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,6$, qui correspond à la seule construction possible.
3. Dans la Figure 3, on a donc pris $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, de sorte que $1 - x - x^2 = 0$.
   Le point d'intersection de la droite (HJ) avec la diagonale (AC), que l'on note U, a pour coordonnées (x, x).
   La question est de savoir si ce point appartient à la droite (DI), qui relie le point D de coordonnées $(0, 1)$ au point I de coordonnées $(1, 1 - x)$.
   Pour cela, il suffit de vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{DU}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DI}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
   Ils sont colinéaires si et seulement si le produit en croix $x \cdot (-x) - (x-1) \cdot 1$ est nul, et ce dernier vaut $x \cdot (-x) - (x-1) \cdot 1 = -x^2 - x + 1 = 0$, par définition de x.
   Les trois droites sont donc bien concourantes.

IV) Un compte de fées [Exercice académique 2017]

Correction

1. Pour trouver le prince, il suffit d'ouvrir deux jours de suite la chambre numéro 2.
2. La remarque fondamentale est que la parité du numéro de la chambre du prince change chaque jour. S'il est dans une chambre paire le premier jour, il sera dans une chambre impaire le second, paire le troisième, etc.
   - **a.** On ouvre la chambre 2 le premier jour. Si on ne trouve pas le prince, il est forcément dans une chambre de numéro ≥ 4, donc le lendemain il sera dans une chambre de numéro ≥ 3.
     On ouvre la chambre 3 le deuxième jour. Si on ne le trouve pas, il est forcément dans une chambre de numéro impair, donc ≥ 5. Le lendemain, il sera dans une chambre de numéro ≥ 4.
     On ouvre la chambre 4 le troisième jour, etc.
     On ouvrira alors la chambre 16 le 15ème jour, sachant qu'à ce moment, si on a pas déjà attrapé le prince, il est forcément dans une chambre de numéro pair de numéro ≥ 16, donc il est forcément dans la chambre que l'on ouvre.
   - **b.** On commence par les 15 premiers essais de la stratégie précédente. Si le prince était initialement dans une chambre paire, on le trouvera.
     À l'issue de ces 15 premiers essais, si on n'a pas attrapé le prince, c'est qu'il était initialement dans une chambre impair, et termine le 15ème jour dans une chambre impair. Il sera alors, le 16ème jour dans une chambre pair, et on peut, du 16ème au 30ème jour, refaire les mêmes 15 essais (chambre 2, puis 3, puis…) qui permettront forcément de trouver le prince.
3. - **a.** Considérons un numéro de chambre i compris entre 2 et 16. Supposons par l'absurde que la stratégie de Clara n'ouvrait cette chambre qu'une seule fois, ou aucune fois.
     Si elle n'ouvrait cette chambre aucune fois, le roi peut dire au prince de se placer initialement dans cette chambre, puis, le deuxième jour, de se déplacer ou bien à droite ou bien à gauche dans la chambre que Clara n'ouvrira pas (on sait quelle chambre elle va ouvrir). Puis il reviendra dans la chambre i, avant de recommencer. Ainsi, il ne sera jamais attrapé.
     Si elle n'ouvrait cette chambre qu'une seule fois, et si cette fois tombe un jour pair, la même stratégie marche. Si l'unique fois ou elle ouvre la chambre est un jour impair, on décale la stratégie, en commençant le premier jour dans une des chambres adjacente à i.
   - **b.** Le mois de février ne comprend qu'au plus 29 jours, donc Clara n'aura qu'au plus 29 essais. En particulier, sa stratégie ne peut pas ouvrir au moins deux fois toutes les chambres 2 à 16.
     D'après la question précédente, en connaissant la suite de Clara, le roi peut empêcher le mariage.
4. Stratégie de Clara : ouvrir : 2, puis 3, puis 3b, puis 3, puis 4, puis 4a, puis 4, puis 5, puis 6, puis 6c, puis 6, puis 6a, puis 6, puis 7.
   Puis recommencer, dans le sens inverse : 7, puis 6, puis 6a,…
   Cette stratégie attrape le prince, en 28 essais.